Segnali in circuiti elettronici digitali

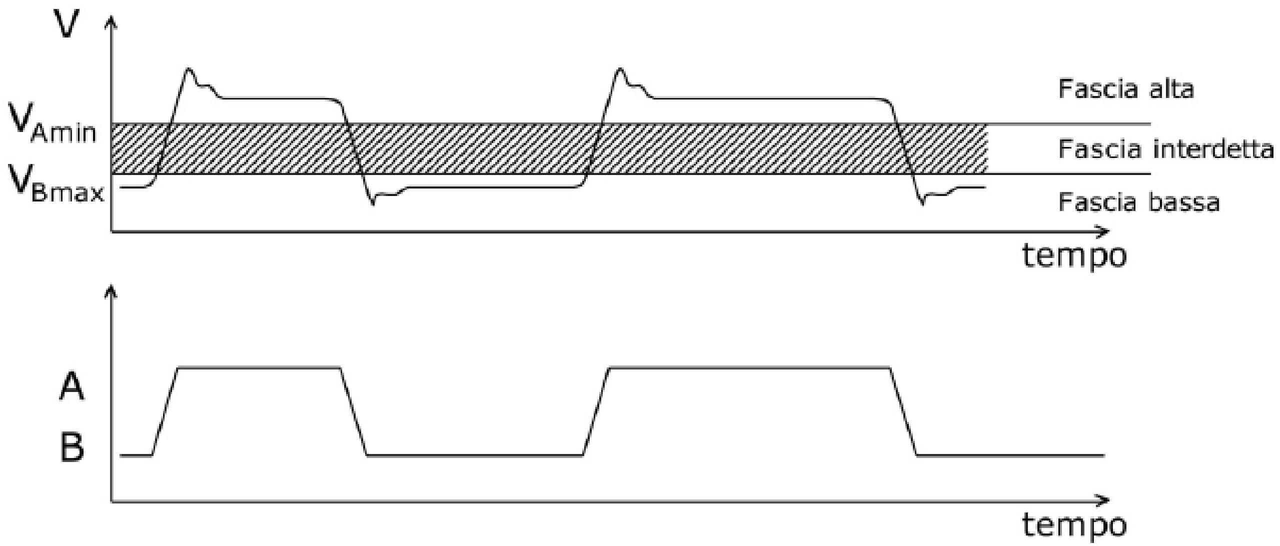
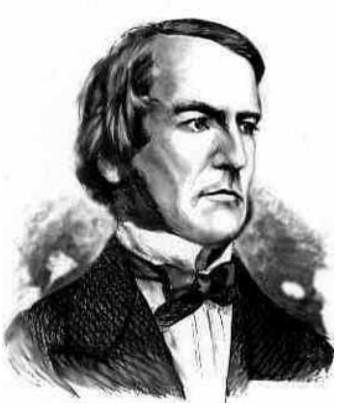


Figura 3.1 - La figura in alto mostra un possibile andamento di un segnale binario reale (si fa riferimento a un segnale di tensione). Il segnale può stare in due zone distinte corrispondenti alla fascia alta e alla fascia bassa. La zona interdetta viene solo attraversata nel passaggio tra le due fasce. V_{Amin} e V_{Bmax} rappresentano rispettivamente gli estremi inferiore e superiore della fascia alta e della fascia bassa. La figura in basso dà una rappresentazione idealizzata del segnale. Questa rappresentazione, per quanto idealizzata, mostra che i tempi di *salita* e di *discesa* non sono nulli.

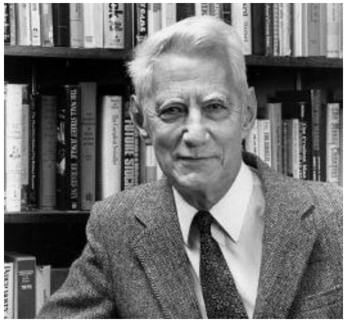
da: G. Bucci. Calcolatori Elettronici – Architettura e organizzazione. © McGraw-Hill, 2009

Da Boole a Shannon

- L'algebra di Boole fu introdotta nel 1854 come strumento per la soluzione matematica di problemi di logica
- George Boole (1815-1864)
  - *An investigation into the laws of thought on which are founded the mathematical theories of logic and probabilities (1854)*



- Il suo uso per descrivere reti binarie di commutazione si deve a Claude Shannon
  - *A symbolic analysis of relay and switching circuits (1938)*



Algebra di Boole

- L'Algebra di Boole può essere vista come un'algebra astratta definita su un supporto K = {0,1} e tre operazioni
  - AND ($\cdot$): $K \times K \rightarrow K$
  - OR (+): $K \times K \rightarrow K$
  - NOT ($\neg$): $K \rightarrow K$

x	y	x AND y
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

x	y	x OR y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

x	NOT x
0	1
1	0

Algebra di Boole: proprietà (1)

- Proprietà commutativa:

  x AND y = y AND x   x OR y = y OR x
- Proprietà associativa:

  (x AND y) AND z = x AND (y AND z)

  (x OR y) OR z = x OR (y OR z)
  - per la proprietà associativa posso definire AND e OR a più di 2 operandi
    - es. x AND y AND z = (x AND y) AND z = x AND (y AND z)
- Proprietà di idempotenza:

  x AND x = x   x OR x = x
- Proprietà di assorbimento:

  x AND (x OR y) = x   x OR (x AND y) = x

Algebra di Boole: proprietà (2)

- Proprietà distributiva

  x AND (y OR z) = (x AND y) OR (x AND z)

  x OR (y AND z) = (x OR y) AND (x OR z)
- Proprietà di convoluzione

  NOT (NOT x) = x
- Proprietà del minimo e del massimo:

  x AND 0 = 0

  x OR 1 = 1

Algebra di Boole come reticolo (1)

- Un'algebra astratta è una terna <K, ·,+> costituita da un insieme *K* (sostegno) sul aule sono definite due leggi binarie di composizione interna "+" e "·"

  $\cdot$: $K \times K \rightarrow K$

  $+$: $K \times K \rightarrow K$
- Un'algebra astratta <K,+, ·> si dice *reticolo* se per ogni coppia di elementi di K le operazioni "+" e "·" soddisfano le proprietà commutativa, associativa, di assorbimento e di idempotenza
- Un reticolo nel quale vale la proprietà distributiva sia di "+" rispetto a "·" che di "·" rispetto a "+" si dice *reticolo distributivo*

Proprietà dei reticoli

- I reticoli sono *ordinati*, ovvero posseggono una relazione d'ordine "≤" così definita

$$x \le y \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} x + y = y \Leftrightarrow x \cdot y = x$$

- Ricordiamo che una relazione d'ordine "≤" deve godere delle seguenti proprietà:
  - riflessiva: $x \le x$
  - antisimmetrica: $x \le y$ *e* $y \le x \;\Rightarrow\; x = y$
  - transitiva: $x \le y$ *e* $y \le z \;\Rightarrow\; x \le z$

Algebra di Boole come algebra astratta

- Un reticolo distributivo si dice *dotato di minimo e massimo assoluti* se in K sono presenti due elementi - che indicheremo con 0 e 1 rispettivamente - i quali verificano la *proprietà del minimo e massimo* per ogni elemento a di K:

  $a \cdot 0 = 0 \quad (0 \leq a) \qquad\qquad a + 1 = 1 \; (a \leq 1)$

- Un reticolo distributivo si dice *complementato* se per ogni elemento a di K esiste ed è unico un elemento (che diremo *complemento di a* ed indicheremo con $\neg a$) per il quale è valida la proprietà del complemento:

  $a \cdot \neg a = 0 \qquad\qquad a + \neg a = 1$

- **Un reticolo distributivo, dotato di minimo e massimo assoluti e complementato, si dice un'algebra di Boole**
  - **L'algebra a due valori definita nelle slide precedenti ne rappresenta un caso particolare**

AdB come reticolo: postulati definitori

Commutativa	P1	$a+b=b+a$	P'1	$a \cdot b=b \cdot a$
Associativa	P2	$(a+b)+c=a+(b+c)$	P'2	$(a \cdot b) \cdot c=a \cdot (b \cdot c)$
Idempotenza	P3	$(a+a)=a$	P'3	$(a \cdot a)=a$
Assorbimento	P4	$a+(a \cdot b)=a$	P'4	$a \cdot (a+b)=a$
Distributiva	P5	$a \cdot (b+c)=a \cdot b+a \cdot c$	P'5	$a+(b \cdot c)=(a+b) \cdot (a+c)$
Min e max	P6	$a \bullet 0=0$	P'6	$a+1=1$
Complemento	P7	$a \cdot (\bar{a})=0$	P'7	$a+(\bar{a})=1$

Legge di dualità

- Da qualsiasi identità booleana se ne può trarre un'altra per *dualità*, sostituendo cioè ad ogni operatore e agli elementi 0 ed 1 il rispettivo duale
- In altre parole, i 14 postulati impiegati per definire l'algebra non sono tutti indipendenti fra loro

Teorema di De Morgan

NOT (x AND y) = (NOT x) OR (NOT y)

NOT (x OR y) = (NOT x) AND (NOT y)

AdB: altre proprietà

- *0* ed *1* sono l’uno il complemento dell’altro

$$\neg 0 = 1 \qquad\qquad \neg 1 = 0$$

- *Convoluzione*: negando due volte un elemento si ottiene l’elemento stesso

$$\neg(\neg\, a) = a$$

- *0* è l’elemento neutro della somma

$$a + 0 = a$$

- *1* è l’elemento neutro del prodotto

$$a \cdot 1 = a$$

Assorbimento del complemento

$$a + \bar{a}b = a + b$$

- Per la dimostrazione usate la proprietà distributiva ed infine il complemento

$$a+\bar{a}b=(a+\bar{a})(a+b) \qquad (P5)$$

$$a+\bar{a}b=(a+b) \qquad (P7)$$

Teorema di De Morgan

$$\overline{a \cdot b} = \bar{a} + \bar{b} \qquad (1)$$

$$\overline{a + b} = \bar{a} \cdot \bar{b} \qquad (2)$$

$$(a+b)+(\bar{a} \cdot \bar{b}) = 1 \qquad (1.1)$$

$$(a+b) \cdot (\bar{a} \cdot \bar{b}) = 0 \qquad (1.2)$$

(1.1) *Dimostrazione*

$$a + b + \bar{a} \cdot \bar{b} = a + \bar{a} \cdot \bar{b} + b + \bar{a} \cdot \bar{b} = \qquad (P1, P3)$$

$$= a + \bar{b} + b + \bar{a} = \qquad (ass.comp)$$

$$= a + \bar{a} + b + \bar{b} = \qquad (P1)$$

$$= 1 + 1 = 1 \qquad (P'7, P'6)$$

(1.2) *Dimostrazione*

$$(a+b) \cdot \bar{a} \cdot \bar{b} = a \cdot \bar{a} \cdot \bar{b} + b \cdot \bar{a} \cdot \bar{b} = \qquad (P5)$$

$$= 0 \cdot \bar{b} + 0 \cdot \bar{a} = \qquad (P7)$$

$$= 0 + 0 = 0 \qquad (P6, P3)$$

La (2) vale per dualità

Principio di eliminazione

- Nell'algebra di Boole ***non vale il principio di eliminazione***
- $x+y=x+z$ non implica necessariamente $y=z$
- L'implicazione vale se è verificata la condizione aggiuntiva $x \cdot y=x \cdot z$

Algebre di Boole (al plurale)

- La definizione di AdB come reticolo non specifica quale sia K e come siano definite le operazioni "+" , "·" e "$\neg$"
  - Specifica soltanto un insieme di proprietà che devono essere soddisfatte da tali operazioni
- Sono così possibili diversi modelli di algebra di Boole , uno dei quali è quello introdotto all'inizio
- Altri possibili modelli di algebra di Boole:
  - l'algebra dei circuiti
  - l'algebra della logica delle proposizioni
  - l'algebra degli insiemi

Insiemi funzionalmente completi

Si può dimostrare che qualsiasi funzione booleana può essere calcolata applicando le funzioni AND, OR, e NOT. Ad esempio:

x XOR y = (x AND NOT y) OR (y AND NOT x)

Per questo, l'insieme {AND, OR, NOT} si dice *funzionalmente completo*.

Esistono altri insiemi funzionalmente completi. Si noti che grazie alle leggi di De Morgan si può costruire la AND da {OR, NOT}, oppure la OR da {AND, NOT}. Quindi anche {AND, NOT} e {OR, NOT} sono insiemi funzionalmente completi.

Circuiti logici

- I circuito logici sono circuiti elettronici nei quali una grandezza elettrica ai morsetti di ingresso e di uscita può assumere solo due valori , convenzionalmente rappresentati con i due elementi dell'algebra di Boole 0 ed 1.
- In elettronica digitale si studia come realizzare circuiti elettronici per il quale il legame tra ingressi ed uscite corrisponde a quello delle operazioni fondamentali AND, OR e NOT dell'algebra di Boole
  - PORTE LOGICHE
- Nelle reti logiche *unilaterali*, le uscite della rete corrispondono a valori di grandezze elettriche misurate in opportuni punti del circuito; il flusso dell'elaborazione procede fisicamente in un'unica direzione, dai segnali di ingresso verso i segnali di uscita
  - Es. la d.d.p. misurata rispetto a massa
- Nelle reti logiche *bilaterali*, invece, l'uscita della rete è determinata dalla presenza o dall'assenza di "contatto" tra due punti della rete.

Livelli di tensione di soglia per porte logiche TTL

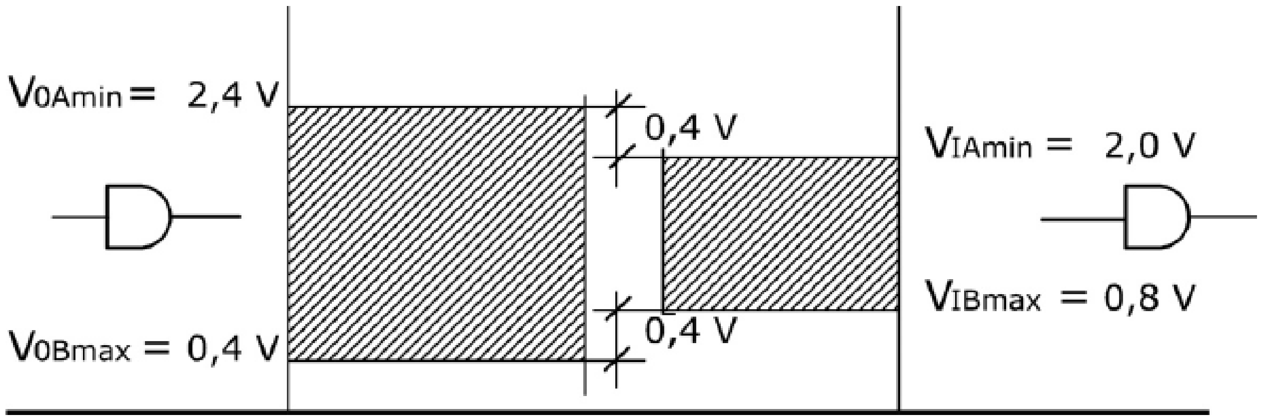
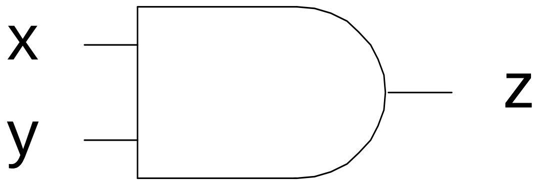


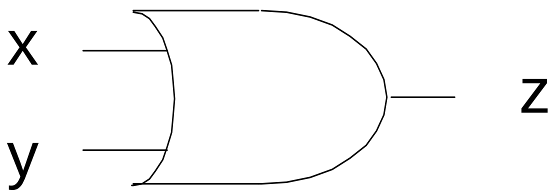
Figura 3.23 - Soglie e margine di rumore per la logica TTL standard. V_{OAmin} e V_{IAmin} sono le soglie in stato alto, V_{OBmax} e V_{IBmax} sono le soglie in stato basso, rispettivamente per uscite e ingressi.

Porte logiche o gate

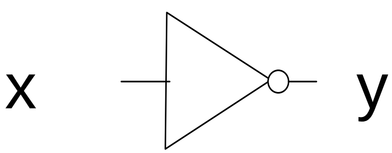
Circuiti elettronici che realizzano le operazioni fondamentali



z = x AND y



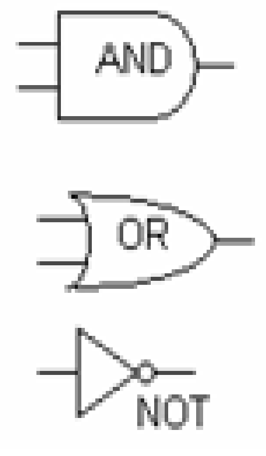
z = x OR y

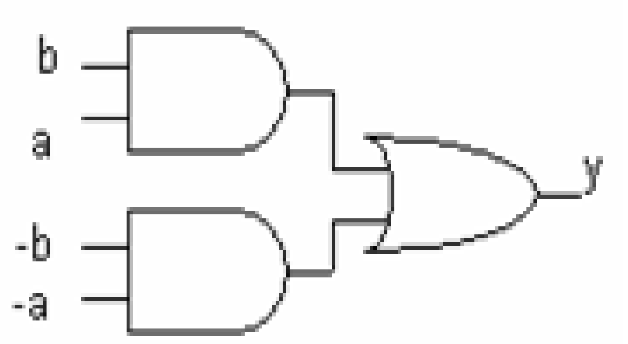


y = NOT x

Algebra dei circuiti: reti unilaterali

Rete unilaterale: il flusso di informazione procede in un unico senso (ingresso→uscita)





Algebra della logica

- L'insieme K={F,V} su cui siano definite le operazioni
  - Congiunzione(^)
  - Disgiunzione (v)
  - Negazione (¬)

è un algebra di Boole con F = 0, V = 1,
congiunzione = · , disgiunzione = +, negazione = ¬

x	y	x ^ y
F	F	F
F	V	F
V	F	F
V	V	V

x	y	x v y
F	F	F
F	V	V
V	F	V
V	V	V

x	¬ x
F	V
V	F

Algebra delle logica

- Due funzioni notevoli nell'algebra delle proposizioni:
  - Funzione equivalenza

$$a \Leftrightarrow b$$

$$f(a,b) = ab + \bar{a}\bar{b}$$

  - Funzione implicazione

$$a \Rightarrow b,\ f(a,b) = \bar{a} + b$$

Si dice che x implica y se e solo se dalla verità di x (antecedente) scaturisce necessariamente la verità di y (conseguente). In termini algebrici, essendo l'implicazione falsa se e solo se x è vera e y è falsa, applicando il Teorema di De Morgan, si ha

$$\overline{x \Rightarrow y} = x\bar{y}$$

$$x \Rightarrow y = \bar{x} + y$$

Algebra della logica

- Se $x \Rightarrow y$ è vera, allora $\bar{x} + y = 1$

$$\bar{x} + y = \bar{x} \cdot \bar{y} + y \qquad (ass.compl)$$

$$= \bar{x} \cdot \bar{y} + xy + y \qquad (P4)$$

$$= \bar{x} \cdot \bar{y} \cdot \bar{y} + xy + yy \qquad (P3)$$

$$= \overline{(x+y)} \cdot \bar{y} + (x+y) \cdot , = 1 \qquad (DeMorgan)$$

per le proprietà dell'equivalenza

$ab + ab$

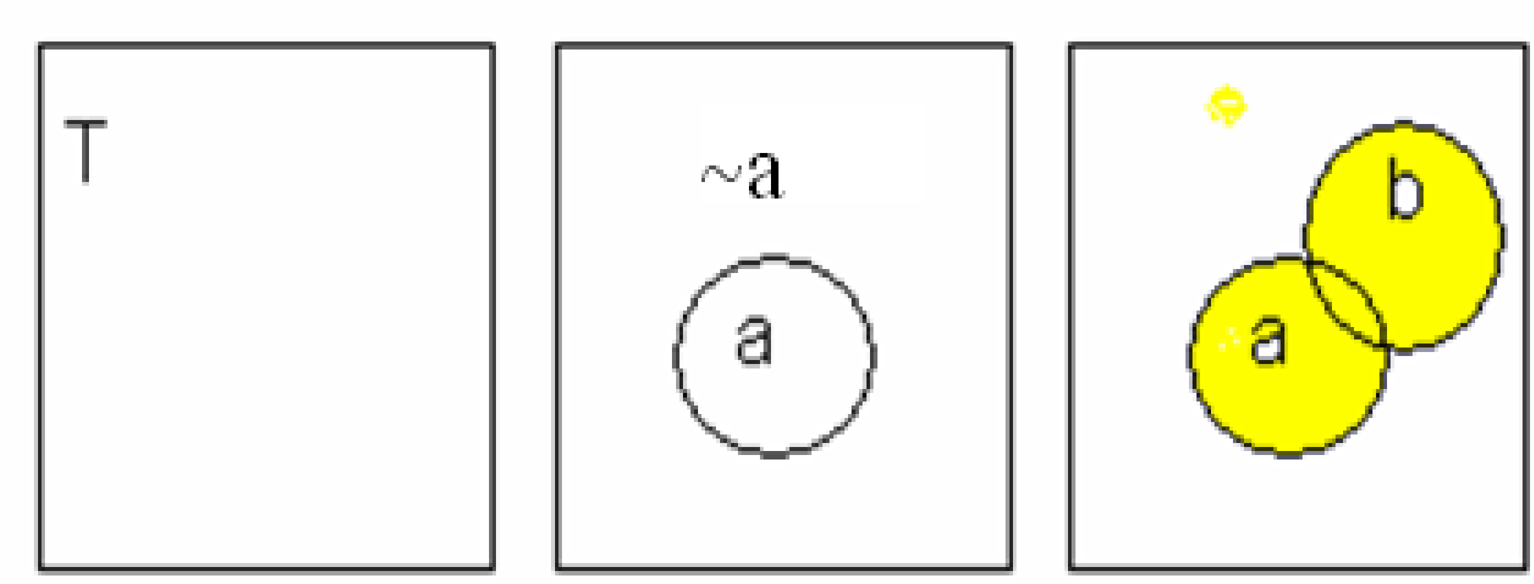
$$x + y = y \Leftrightarrow x \leq y$$

l'implicazione è la relazione d'ordine nell'algebra della logica

Algebra degli insiemi

Insiemi		Modello matematico	
$\cup$	unione	$+$	somma
$\cap$	intersezione	$\cdot$	prodotto
$\sim A$	complemento	$\overline{a}$	complemento
Φ	insieme vuoto	0	minimo assoluto
T	insieme "totale"	1	massimo assoluto

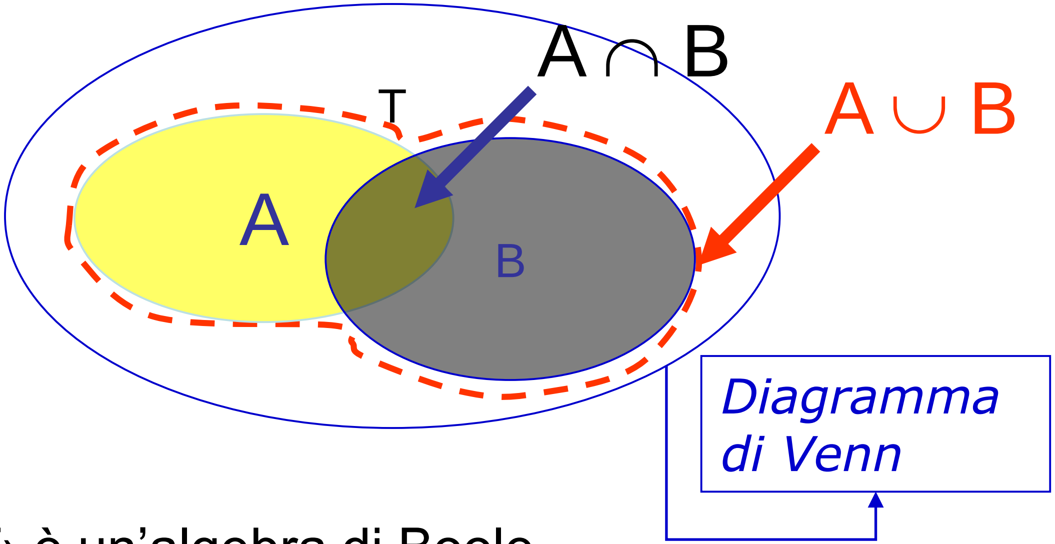
Algebra degli insiemi (2)



a) Insieme universo b) ~a c) a ∪ b

Algebra degli insiemi (3)

- Dati due insiemi A,B $\in$ T,sono definite le operazioni di
  - Unione ($\cup$)
  - Intersezione ($\cap$)
  - Complemento (~)



$a \cap \Phi = \Phi$
$a \cup T = T$

la sestupla ‹K, $\cup$**,** $\cap$, ~,Φ,T› è un'algebra di Boole

ove:

- K indica l'insieme delle parti di T
- Φ indica l'insieme vuoto

- La relazione d'ordine ≤ equivale alla relazione di inclusione tra insiemi

Teorema di Stone

- Ogni algebra di Boole è rappresentabile su un'algebra di insiemi
- Il modello degli insiemi (equivalentemente i diagrammi di Venn) può essere assunto come strumento per verificare o dimostrare proprietà di una qualsiasi algebra di Boole

Confronti

simboli	denominazioni
$+ \quad \vee \quad \cup$	somma logica, unione, disgiunzione, OR
$\cdot \quad \wedge \quad \cap$	prodotto logico, intersezione, congiunzione, AND
$\sim a \quad \neg a \quad \bar{a} \quad a' \quad -a$	complementazione, negazione, NOT
$0 \quad N \quad \Phi \quad F$	zero, vuoto, Nullo, falso, basso, assente
$1 \quad T \quad V$	uno, insieme totale, vero. true. alto, presente

NOTA: nel seguito faremo riferimento all'algebra di Boole definita all'inizio con K = $\{0,1\}$ e le funzioni AND, OR e NOT definite mediante tabelle

Utilizzeremo quest'algebra per descrivere le relazioni ingresso-uscita dei circuiti logici

Utilizzeremo l'algebra degli insiemi per la sua comodità dell'interpretare alcune proprietà

Operatori logici generalizzati (1)

Dato un vettore di variabili booleane $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, e una variabile booleana α, indicheremo con la notazione:

$Y = \alpha\ OP\ X$ (dove *OP* è un operatore booleano)

l'operazione che produce il vettore booleano Y così definito:

$Y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ con

$y_1 = \alpha\ OP\ x_1$

. . . .

$y_n = \alpha\ OP\ x_n$

Esempio:

α AND X ha come risultato il vettore formato da:

$(\alpha \text{ AND } x_1, \alpha \text{ AND } x_2, \ldots, \alpha \text{ AND } x_n)$

Operatori logici generalizzati (2)

Dati due vettori di variabili booleane X = (x_1, x_2, …, x_n) e Y= (y_1, y_2, …, y_n) indicheremo con la notazione:

Z = X *OP* Y   (dove *OP* è un operatore booleano)

l’operazione che produce il vettore booleano Z così definito:

Z = (z_1, z_2, …, z_n) con

$z_1 = x_1$ *OP* y_1

. . . .

$z_n = x_n$ *OP* y_n

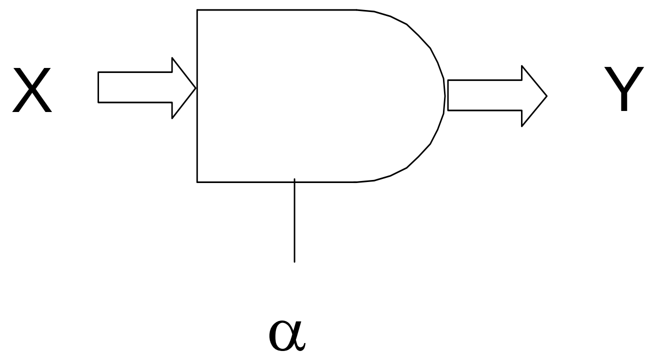
Esempio:

X OR Y ha come risultato il vettore formato da:

(x_1 OR y_1, x_2 OR y_2, …, x_n OR y_n)

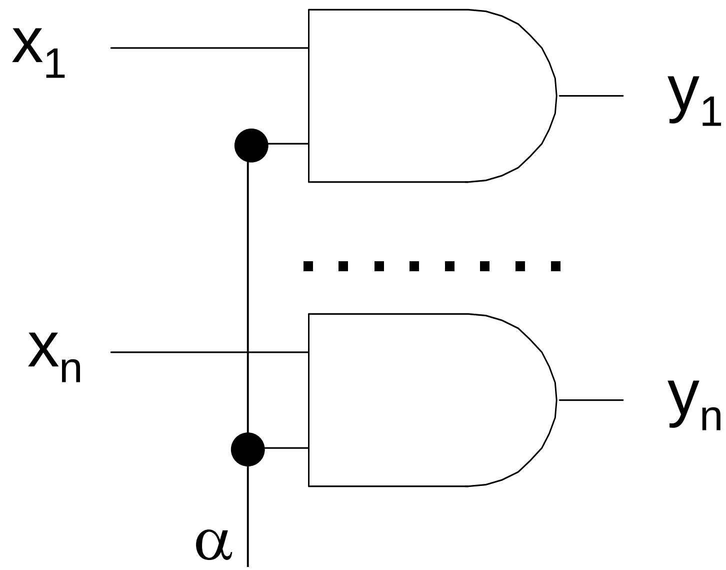
Porte logiche generalizzate (1)

Rappresentazione simbolica:



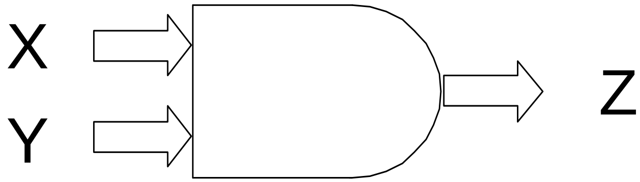
$Y = \alpha$ AND X

Circuito equivalente:



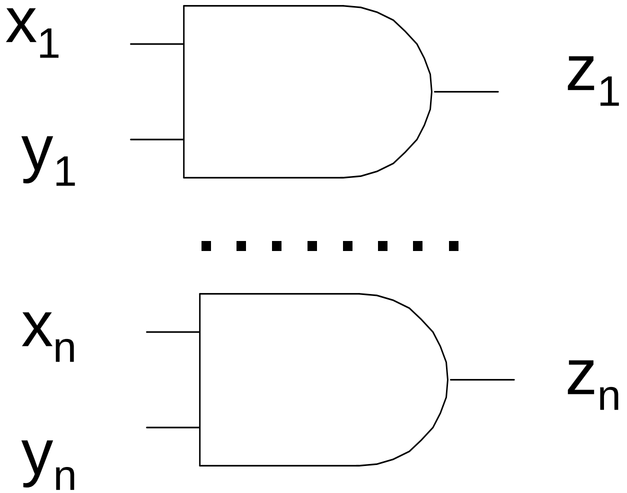
Porte logiche generalizzate (2)

Rappresentazione simbolica:



Z = X AND Y

Circuito equivalente:



Funzioni XOR ed EQ

x_1	x_2	$f(x_1,x_2)$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Questa funzione è detta OR esclusivo, o XOR

x_1	x_2	$f(x_1,x_2)$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Questa funzione è detta equivalenza, o EQU

Funzioni NAND e NOR

NAND $$x \uparrow y = \overline{x \cdot y} \qquad = \overline{x} + \overline{y}$$

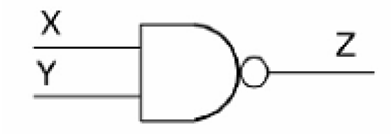
NOR $$x \downarrow y = \overline{x + y} \qquad = \overline{x} \cdot \overline{y}$$

De Morgan

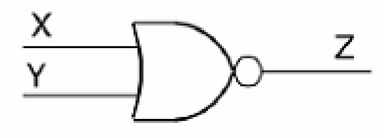
$$x_1 \uparrow x_2 \uparrow \ldots \uparrow x_n = \overline{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n} \qquad = \overline{x_1} + \overline{x_2} + \ldots \overline{x_n}$$

$$x_1 \downarrow x_2 \downarrow \ldots \downarrow x_n = \overline{x_1 + x_2 + \ldots + x_n} \qquad = \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot \ldots \cdot \overline{x_n}$$

Porte NAND e NOR



x	y	z
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0



x	y	z
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

Non associatività di NAND e NOR

- NAND e NOR ***non*** godono della proprietà associativa

NAND $(x_1 \uparrow x_2) \uparrow x_3 \neq x_1 \uparrow (x_2 \uparrow x_3) \neq x_1 \uparrow x_2 \uparrow x_3$

NOR $(x_1 \downarrow x_2) \downarrow x_3 \neq x_1 \downarrow (x_2 \downarrow x_3) \neq x_1 \downarrow x_2 \downarrow x_3$

AND, OR e NOT da NAND e NOR

- E' possibile ottenere una AND e una OR tramite NAND e NOR

$$x \cdot y = \overline{x \uparrow y} = \overline{x} \downarrow \overline{y}$$

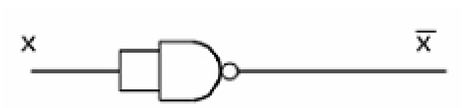
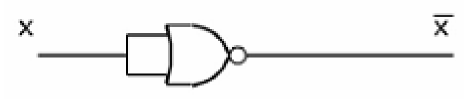
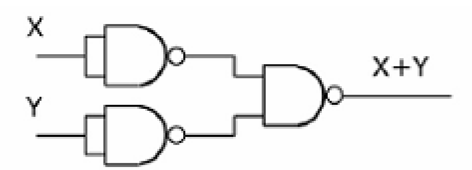
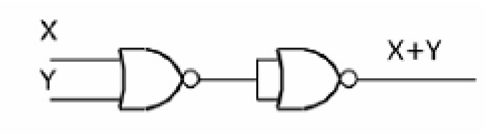
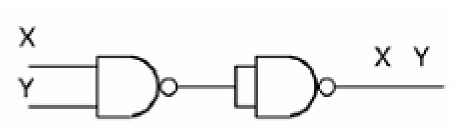
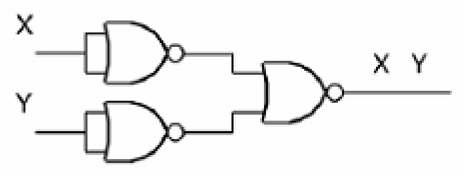
$$x + y = \overline{x \downarrow y} = \overline{x} \uparrow \overline{y}$$

- E' possibile ottenere una NOT tramite NAND e NOR

NAND $\quad x \uparrow 1 = \overline{x \cdot 1} = \overline{x}$

NOR $\quad x \downarrow 0 = \overline{x + 0} = \overline{x}$

AND, OR e NOT da NAND e NOR

	NAND	NOR
NOT		
OR		
AND		

Funzioni NAND e NOR

- Riassumendo, le NAND permettono di ottenere una NOT, una AND ed una OR
- Similmente per la NOR
- Ricordiamo che {AND,OR,NOT} è un insieme funzionalmente completo, quindi →

{NAND} e {NOR} sono due
insiemi funzionalmente completi

NAND e NOR: proprietà

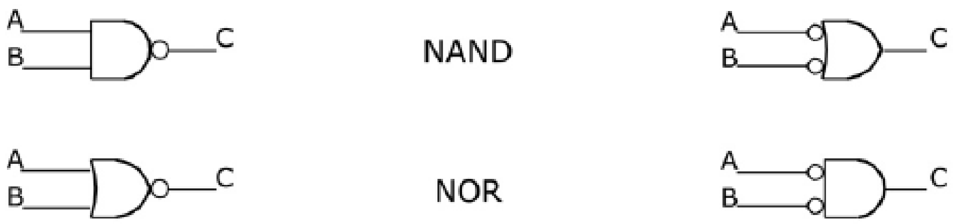


Figura 3.17 - Simboli equivalenti per le porte NAND e NOR.

Proprietà di NAND e NOR

- Una NAND di prodotti è uguale alla NAND delle variabili indipendenti.
(***Duale***) Una NOR di somme è uguale alla NOR delle variabili indipendenti

$$(ab)\uparrow(cd)=\overline{(ab)\cdot(cd)}=a\uparrow b\uparrow c\uparrow d$$

$$(a+b)\downarrow(c+d)=\overline{(a+b)\cdot(c+d)}=a\downarrow b\downarrow c\downarrow d$$

- Una OR di NAND è uguale alla NAND delle variabili indipendenti.
(***Duale***) Una AND di NOR è uguale alla NOR delle variabili indipendenti

$$(a\uparrow b)+(c\uparrow d)=\overline{a}+\overline{b}+\overline{c}+\overline{d}=a\uparrow b\uparrow c\uparrow d$$

$$(a\downarrow b)\cdot(c\downarrow d)=\overline{a}\cdot\overline{b}\cdot\overline{c}\cdot\overline{d}=a\downarrow b\downarrow c\downarrow d$$

- Una AND è uguale ad una NOR di NAND.
(***Duale***) Una OR è uguale ad una NAND di NOR

$$(a\uparrow b)\downarrow(c\uparrow d)=abcd$$

$$(a\downarrow b)\uparrow(c\downarrow d)=a+b+c+d$$

Forme NAND e NOR di una funzione

- Una forma elementare di tipo P si trasforma in una forma NAND a due livelli operando come segue:
  - tutti gli operatori si trasformano in NAND, rispettando le priorità;
  - le clausole costituite da un solo letterale vengono negate.

$$f = \gamma_1 + \gamma_2 + \ldots + \gamma_n = \overline{\overline{\gamma_1} \cdot \overline{\gamma_2} \cdot \ldots \cdot \overline{\gamma_n}} = \overline{\gamma_1} \uparrow \overline{\gamma_2} \uparrow \ldots \uparrow \overline{\gamma_n}$$

- Dualmente per la forma di tipo S

Da rete AND-OR a rete NAND

Figura 3.16 - Passaggio da rete SP a rete NAND. In questo caso, il passaggio richiede solo la sostituzione di porte AND e OR con porte NAND.

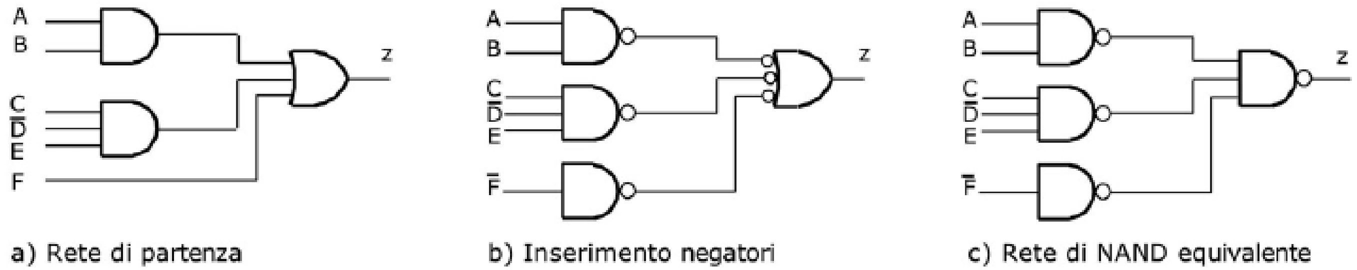


Figura 3.18 - Passaggio da rete SP a rete di NAND.

Generalizzando…

- Se le γ_n sono funzioni invece che letterali, la proprietà precedente può essere generalizzata
- Una forma con operatori AND e OR a *n* livelli che abbia come ultimo livello una OR (*AND*) si trasforma in una forma **NAND** (*NOR*), operando come segue:
  - tutti gli operatori si trasformano in NAND (*NOR*) rispettando le priorità;
  - tutti i letterali che costituiscono variabili di funzioni di livello complementare dispari si negano.

Forme NAND e NOR di una funzione

- Una forma con operatori AND e OR a *n* livelli che abbia come ultimo livello una OR (AND) si trasforma in una forma **NOR** (NAND) ad n+1 livelli, operando come segue:
  - si aggiunge una NOR (NAND) finale che complementa le uscite;
  - tutti gli operatori si trasformano in NOR (NAND) rispettando le priorità;
  - tutti i letterali che costituiscono variabili di funzioni di livello complementare dispari si negano.

$$f = \gamma_1 + \gamma_2 + \ldots + \gamma_n = (\gamma_1 + \gamma_2 + \ldots + \gamma_n) \cdot 1 = (\gamma_1 \downarrow \gamma_2 \downarrow \ldots \downarrow \gamma_n) \downarrow 0$$

Esempio 1

Dalla funzione a 2 livelli in forma P:

$$f = ab + \overline{a}\,\overline{b} + c$$

si ottiene la forma NAND

$$f = (a \uparrow b) \uparrow (\overline{a} \uparrow \overline{b}) \uparrow \overline{c}$$

ove c è negato perché singolo letterale (livello complementare 1) oppure quella NOR

$$f = ((\overline{a} \downarrow \overline{b}) \downarrow (a \downarrow b) \downarrow c) \downarrow 0$$

ove a,b sono negate in entrambe le clausole perché diventate di livello 3 e c non lo è più perché di livello 2.

Esempio 2

Dualmente dalla funzione in forma S

$$f = (a + b) \cdot (\overline{a} + \overline{b}) \cdot c$$

si ottiene la forma NOR

$$f = (a \downarrow b) \downarrow (\overline{a} \downarrow \overline{b}) \downarrow \overline{c}$$

oppure quella NAND

$$f = ((\overline{a} \uparrow \overline{b}) \uparrow (a \uparrow b) \uparrow c) \uparrow 1$$

Esempio 3

La funzione a 4 livelli

$$f = b \cdot \left(c + \bar{c} \cdot \left(\bar{a} + d\right)\right)$$

si trasforma nella forma NOR ancora a 4 livelli

$$f = \bar{b} \downarrow \left(c \downarrow \left(c \downarrow \left(\bar{a} \downarrow d\right)\right)\right)$$

dove b e $\bar{c}$ sono negate rispettivamente ai livelli complementari 1 e 3, oppure nella forma NAND a 5 livelli

$$f = \left(b \uparrow \left(\bar{c} \uparrow \left(\bar{c} \uparrow \left(a \uparrow \bar{d}\right)\right)\right)\right) \uparrow 1$$

ove $\bar{c}$ al livello 3 e $\bar{a}$,d al livello 5 sono negati.